ENFOQUE DE INGENIERÍA CIVIL

Propósito Pedagógico: Explicación analítica y visual paso a paso de las funciones trascendentes, escalonadas, compuestas, inversas e implícitas, aplicadas directamente al análisis de deflexiones mecánicas, comportamiento sísmico, consolidación de suelos y deformaciones térmicas en materiales de construcción.

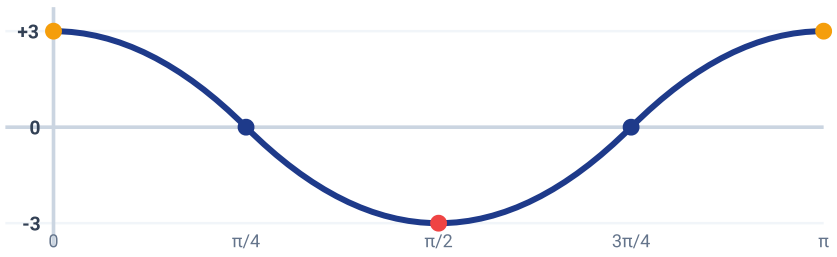
2.5 FUNCIONES TRASCENDENTES: TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Las **funciones trascendentes** son aquellas que no pueden expresarse mediante un número finito de operaciones algebraicas elementales. Trascienden al álgebra clásica y son indispensables en la ingeniería para modelar procesos periódicos, amortiguamiento sísmico y decaimiento térmico o hidrológico.

2.5.1 Funciones Trigonométricas

Relacionan ángulos (expresados estrictamente en **radianes**) con las razones trigonométricas del círculo unitario. La función seno $f(x) = \sin(x)$ y la función coseno $f(x) = \cos(x)$ son continuas en toda la recta real con rango $[-1, 1]$ y periodo $T = 2\pi$.

FIGURA 2.5.1: Comportamiento Ondulatorio de f(x) = 3 cos(2x) [Amplitud = 3, Periodo T = π]



✏️ EJERCICIO RESUELTO 1: ANÁLISIS DINÁMICO DE LA FUNCIÓN COSENO

Enunciado: Para la función de deflexión estructural periódica $f(x) = 3\cos(2x)$ definida en el intervalo $[0, \pi]$, determine analíticamente su dominio, rango, periodo e intersecciones con el eje X.

Solución Paso a Paso:

- **Paso 1: Dominio y Rango:** El dominio asignado es $Dom(f) = [0, \pi]$. Como la función coseno oscila entre −1 y 1, al multiplicar por la amplitud $A = 3$, el rango es $Ran(f) = [-3, 3]$.
- **Paso 2: Periodo (T):** Para la función general $A\cos(Bx)$, el periodo es $T = 2\pi / B$. Con $B = 2$, tenemos $T = 2\pi / 2 = \pi$.
- **Paso 3: Intersecciones con eje X:** Ocurren cuando $f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0$. Las soluciones en el intervalo son $2x = \pi/2 \Rightarrow x = \pi/4$ y $2x = 3\pi/2 \Rightarrow x = 3\pi/4$.

x (Radianes)	2x	cos(2x)	f(x) = 3 cos(2x)	Punto Gráfico	Estado Físico
0	0	1.0	**+3.0**	(0, 3)	Cresta / Deflexión Máxima Superior
π / 4	π / 2	0.0	**0.0**	(π/4, 0)	Cruce por Cero / Posición Neutra
π / 2	π	-1.0	**-3.0**	(π/2, -3)	Valle / Deflexión Máxima Inferior
3π / 4	3π / 2	0.0	**0.0**	(3π/4, 0)	Cruce por Cero / Posición Neutra
π	2π	1.0	**+3.0**	(π, 3)	Cresta / Cierre de Ciclo Completo

2.5.2 Funciones Exponenciales

Poseen la forma general $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$. Cuando la base es la constante de Euler $e \approx 2.71828$, obtenemos la **función exponencial natural** $f(x) = e^x$. Su dominio son todos los reales $(-\infty, \infty)$, su rango son los reales estrictamente positivos $(0, \infty)$ y cuenta con una asíntota horizontal en $y = 0$.

✏️ EJERCICIO RESUELTO 2: MODELO GEOTÉCNICO DE CONSOLIDACIÓN DE SUELOS

Enunciado: La presión del agua en los poros P (en kPa) durante la consolidación de un estrato arcilloso en Tehuacán en función del tiempo t (días) sigue el modelo exponencial: $P(t) = 120\, e^{-0.1\,t}$. Determine la presión inicial, el dominio físico y la presión transcurridos 10 días.

Solución Paso a Paso:

- **Presión Inicial (t = 0):** $P(0) = 120\, e^{-0.1(0)} = 120\, e^{0} = 120(1) = 120\ \text{kPa}$.
- **Dominio y Comportamiento Límite:** $Dom(P) = [0, \infty)$. Cuando $t \to \infty$, $e^{-0.1t} \to 0$, por lo que la presión se disipa asintóticamente hacia 0 kPa.
- **Evaluación a los 10 Días:** $P(10) = 120\, e^{-0.1(10)} = 120\, e^{-1} = 120 / 2.71828 \approx 44.15\ \text{kPa}$.

2.5.3 Funciones Logarítmicas

La función logarítmica es la inversa de la exponencial: $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$. Para la base natural e, se denota como $f(x) = \ln(x)$. Requiere que su argumento sea estrictamente positivo. Su dominio es $(0, \infty)$, su rango es $(-\infty, \infty)$ y posee una asíntota vertical en $x = 0$.

> ✏️ **EJERCICIO RESUELTO 3: DOMINIO Y ASÍNTOTAS DE LNCURVA**
>
> **Enunciado:** Determine el dominio explícito, la asíntota vertical y la intersección con el eje X para la función $g(x) = \ln(2x - 6)$.
>
> **Solución Paso a Paso:**
>
> - **Paso 1: Dominio:** El argumento debe ser strictly positivo: $2x - 6 > 0 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$. Por tanto, $\text{Dom}(g) = (3, \infty)$.
> - **Paso 2: Asíntota Vertical:** Ocurre donde el argumento se anula: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ (Recta vertical $x = 3$).
> - **Paso 3: Intersección eje X:** Hacemos $g(x) = 0 \Rightarrow \ln(2x - 6) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = e^0 = 1 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = 3.5$. Punto: $(3.5, 0)$.

2.6 FUNCIONES ESCALONADAS Y POR PARTES

Una **función por partes** modifica su regla de correspondencia según el subintervalo de la variable x. Una **función escalonada** es un caso particular donde la función toma valores constantes discontinuos por tramos, ideal para modelar cargas estructurales discontinuas.

> ✏️ **EJERCICIO RESUELTO 4: CARGA DISTRIBUIDA TRAMO A TRAMO EN VIGA CONTINUA**
>
> **Enunciado:** La carga transversal $w(x)$ (en kN/m) sobre una viga de 12 metros se representa mediante la función escalonada:
>
> $$w(x) = 15 \text{ si } 0 \le x < 4 \mid 35 \text{ si } 4 \le x \le 8 \mid 20 \text{ si } 8 < x \le 12$$
>
> Calcule la carga en $x = 2$ m, $x = 4$ m, $x = 10$ m y especifique el dominio y rango.
>
> **Solución Paso a Paso:**
>
> - **Evaluación en x = 2:** Cae en $[0, 4) \Rightarrow w(2) = 15$ kN/m.
> - **Evaluación en x = 4:** Cae en $[4, 8] \Rightarrow w(4) = 35$ kN/m.
> - **Evaluación en x = 10:** Cae en $(8, 12] \Rightarrow w(10) = 20$ kN/m.
> - **Dominio y Rango:** $\text{Dom}(w) = [0, 12]$ metros. $\text{Ran}(w) = \{15, 20, 35\}$ kN/m.

2.7 OPERACIONES CON FUNCIONES: ADICIÓN, MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN Y COMPOSICIÓN

Dadas dos funciones f y g, se definen la suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, el producto $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ y el cociente $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ para $g(x) \neq 0$. La **composición** $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ evalúa la función externa en el valor de salida de la interna.

✏️ EJERCICIO RESUELTO 5: COMPOSICIÓN Y DOMINIO RESTRINGIDO

Enunciado: Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = \sqrt{(x - 1)}$, obtenga la regla de correspondencia de $(f \circ g)(x)$ y determine su dominio real.

Solución Paso a Paso:

- **Paso 1: Aplicación de la regla:** $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{(x - 1)}) = (\sqrt{(x - 1)})^2 + 3$.
- **Paso 2: Simplificación algebraica:** $(f \circ g)(x) = (x - 1) + 3 = x + 2$.
- **Paso 3: Análisis de Dominio:** El dominio de la función interna $g(x)$ requiere $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Aunque la expresión simplificada $x + 2$ parece no tener restricciones, la composición hereda el dominio de la función interna. Por lo tanto, $\text{Dom}(f \circ g) = [1, \infty)$.

2.8 FUNCIÓN INVERSA

Una función f admite una **función inversa** f^{-1} si y solo si es **biyectiva** (inyectiva y suprayectiva). Cumple que $f(f^{-1}(x)) = x$. Su gráfica presenta simetría reflejada respecto a la recta de identidad $y = x$.

✏️ EJERCICIO RESUELTO 6: OBTENCIÓN ANALÍTICA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Enunciado: Obtenga la función inversa para la relación lineal de deformación $f(x) = (3x - 5) / 2$ y verifique la composición de identidad.

Solución Paso a Paso:

- **Paso 1: Expresar en y:** $y = (3x - 5) / 2$.
- **Paso 2: Despejar x:** $2y = 3x - 5 \Rightarrow 2y + 5 = 3x \Rightarrow x = (2y + 5) / 3$.
- **Paso 3: Intercambiar variables (x ↔ y):** $f^{-1}(x) = (2x + 5) / 3$.
- **Comprobación:** $f(f^{-1}(x)) = [3((2x + 5)/3) - 5] / 2 = (2x + 5 - 5) / 2 = 2x / 2 = x$. (Verificado ✓).

2.9 FUNCIÓN IMPLÍCITA

Una función está en forma **explícita** cuando la variable dependiente está aislada: $y = f(x)$. Está en forma **implícita** cuando la relación entre variables se presenta mediante una ecuación no despejada de la forma $F(x, y) = 0$.

> ✏️ **EJERCICIO RESUELTO 7: DEFORMACIÓN TÉRMICA IMPLÍCITA EN CONCRETO**
>
> **Enunciado:** La relación entre la deformación δ (mm) y la temperatura T (°C) de un elemento de concreto viene dada implícitamente por $3\delta - 0.05\,T + 1.2 = 0$. Exprese la función de forma explícita $\delta = f(T)$ y evalúe a $T = 40\ °C$.
>
> **Solución Paso a Paso:**
>
> - **Forma Explícita:** Despejamos δ: $3\delta = 0.05\,T - 1.2 \Rightarrow \delta(T) = (0.05\,T - 1.2) / 3$.
> - **Evaluación a 40 °C:** $\delta(40) = (0.05(40) - 1.2) / 3 = (2.0 - 1.2) / 3 = 0.8 / 3 \approx 0.2667\ mm$.

2.10 OTRO TIPO DE FUNCIONES (PARIDAD Y VALOR ABSOLUTO)

Una función es **par** si $f(-x) = f(x)$ (simetría respecto al eje Y, como x^2 o $\cos(x)$). Es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ (simetría respecto al origen, como x^3 o $\sin(x)$). La función **valor absoluto** $f(x) = |x|$ pliega el dominio negativo al semiplano positivo.

> 📝 **EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN (REACTIVOS PRÁCTICOS)**
>
> Demuestre su comprensión resolviendo los siguientes reactivos diseñados para el examen de la Unidad 2:
>
> 1. **Trascendentes:** Calcule el dominio y la asíntota vertical de $f(x) = \ln(3x - 12)$.
> 2. **Escalonadas:** Para $g(x) = x^2$ si $x < 2$ | 5 si $x \geq 2$, determine $g(1)$, $g(2)$ y $g(3)$.
> 3. **Composición:** Si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x + 3$, halle $(f \circ g)(x)$ y su dominio.
> 4. **Inversa:** Determine la función inversa para la expresión cuadrática restringida $f(x) = x^2 - 4$ con $x \geq 0$.
> 5. **Aplicación Civil:** La fuerza en un resorte helicoidal sigue la ecuación implícita $2\delta + 4F - 100 = 0$. Exprese $F = f(\delta)$ y halle la fuerza cuando la deflexión es $\delta = 10\ mm$.